

# **BIOELECTRICIDAD y MODELADO BIOELÉCTRICO DEL CORAZÓN**

**Universidad Politécnica de Valencia, España**

**Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Argentina**

**Prof. José M. Ferrero**

Universidad Politécnica de Valencia, España



# TEMA 8

## SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL ELECTROCARDIOGRAMA (ECG)

Chema Ferrero

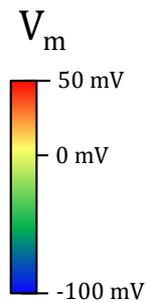
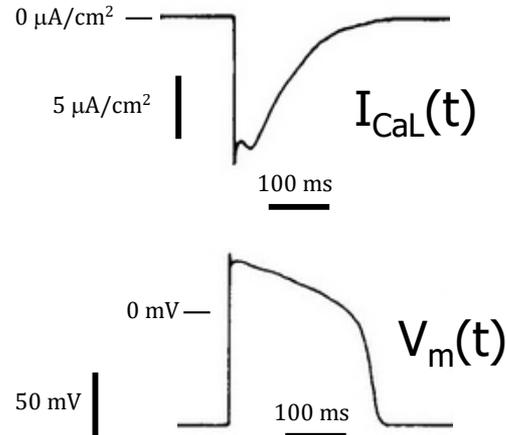
Bioelectricidad y Modelado Computacional del Corazón

# TEMA 8

## SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL ELECTROCARDIOGRAMA (ECG)

- 8.1.- Cálculo de los potenciales en el torso (el "tridominio")
- 8.2.- Simulación multiescala del ECG
- 8.3.- Las ondas del ECG
- 8.4.- Los potenciales de superficie del torso

## En episodios anteriores...



$$p_{oSf} = \prod_i f_{iSf}(t, V_m) \quad f = 1 \dots N_f \quad i = 1 \dots N_C$$

$$\frac{df_{iSf}}{dt} = \frac{f_{iSf,\infty}(V_m) - f_{iSf}(t)}{\tau_{iSf}(V_m)} \quad i = 1 \dots N_C$$

$$E_S = \frac{RT}{z_S F} \ln \frac{[S]_e}{[S]_i} \quad S = Na^+, Ca^{2+}, K^+, Cl^-$$

## ECUACIONES DEL MODELO BIDOMINIO

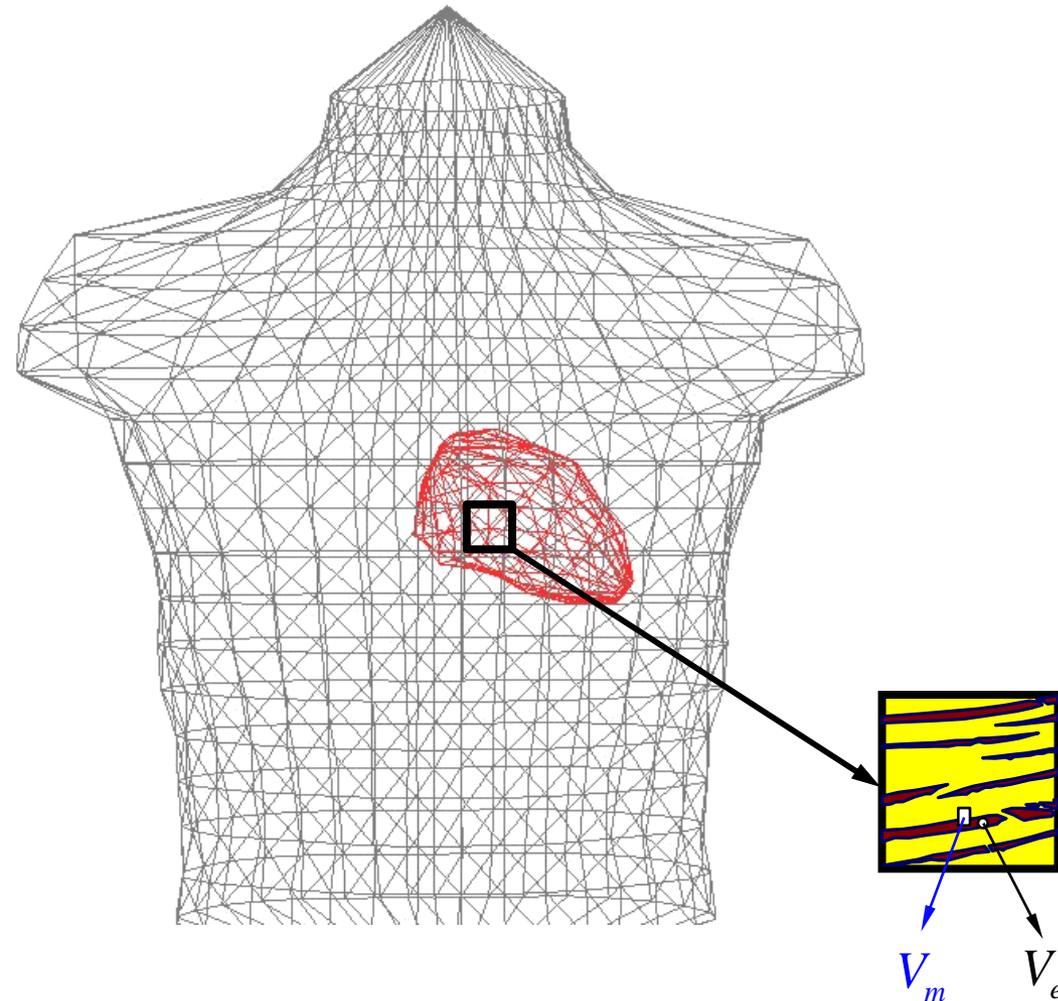
$$\beta \vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m) = c_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \sum_f \bar{g}_{Sf} p_{oSf} (V_m - E_S) + \sum_{b,i} j_{b,i} + j_{est}$$

Ecuación de la propagación

$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

Ecuación del Potencial Extracelular

## Dentro del miocardio bidominio...



$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

Ecuación del Potencial Extracelular

... y fuera de él... iel torso! (el tercer dominio)

$$\vec{j}_t = -\sigma_t \vec{\nabla} V_t$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

corriente que se crea o se destruye en el torso

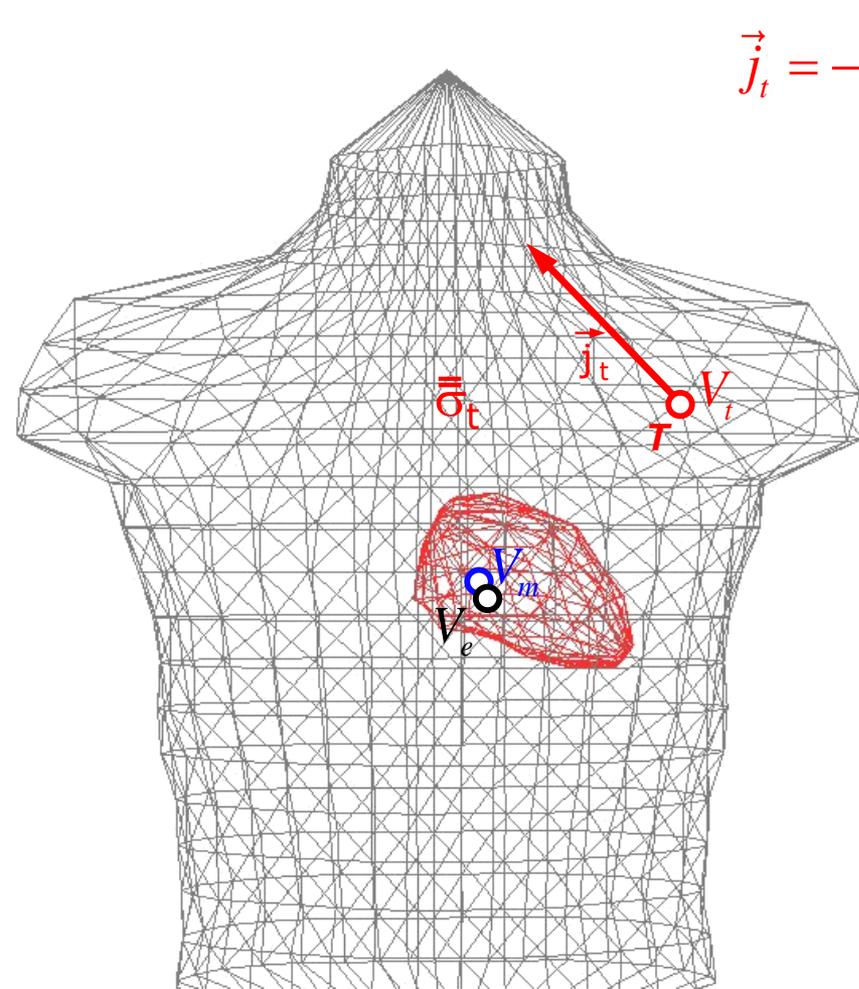
Si el punto  $T$  está sobre la superficie (piel)...

Ecuación del ECG

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

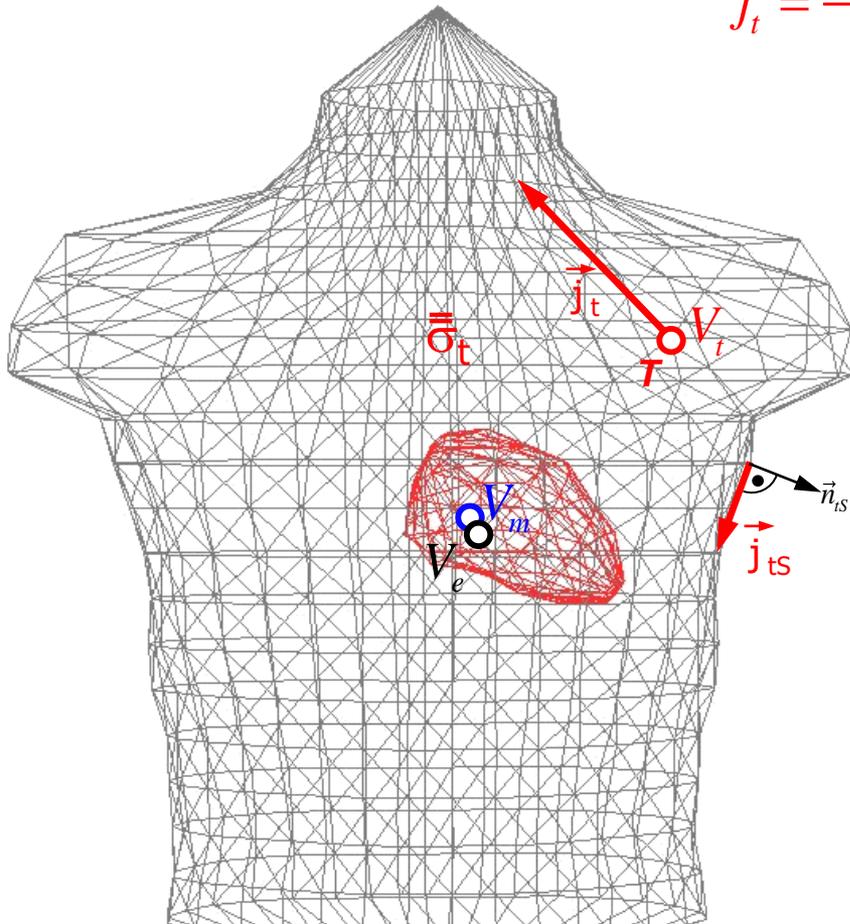
$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

Ecuación del Potencial Extracelular



# Condiciones de contorno

$$\vec{j}_t = -\sigma_t \vec{\nabla} V_t$$



## Condiciones de contorno

A) En la superficie del torso

$$\vec{j}_{tS} \cdot \vec{n}_{tS} = 0$$

$$\left( \sigma_{tS} \vec{\nabla} V_{tS} \right) \cdot \vec{n}_{tS} = 0$$

B) En la superficie del miocardio

$$V_{tm} = V_e$$

Si el punto  $T$  está sobre la superficie (piel)...

Ecuación del ECG

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

Ecuación del Potencial Extracelular

# Proceso de cálculo computacional del ECG

1. Se calculan los potenciales de membrana con la **ecuación de la propagación**
2. Se calculan los potenciales extracelulares intra-miocárdicos con la **ecuación del potencial extracelular**
3. Se calculan los potenciales del torso con la **ecuación del ECG**

$$\beta \vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m) = c_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \sum_f \bar{g}_{sf} p_{osf} (V_m - E_s) + \sum_{b,i} j_{b,i} + j_{est}$$

Ecuación de la propagación

Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} (\sigma_{is} \vec{\nabla} V_{is}) \cdot \vec{n}_{is} &= 0 \\ V_{tm} &= V_e \end{aligned}$$

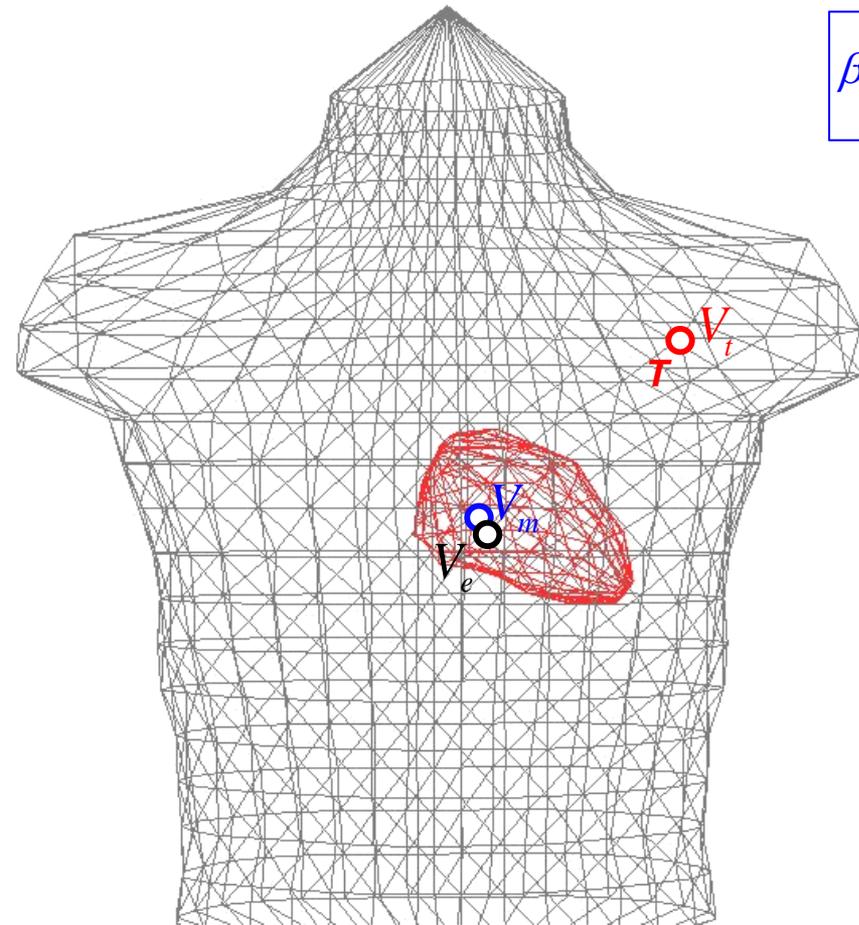
Si el punto  $T$  está sobre la superficie (piel)...

Ecuación del ECG

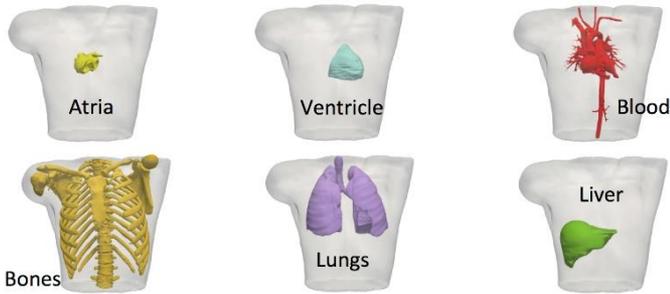
$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

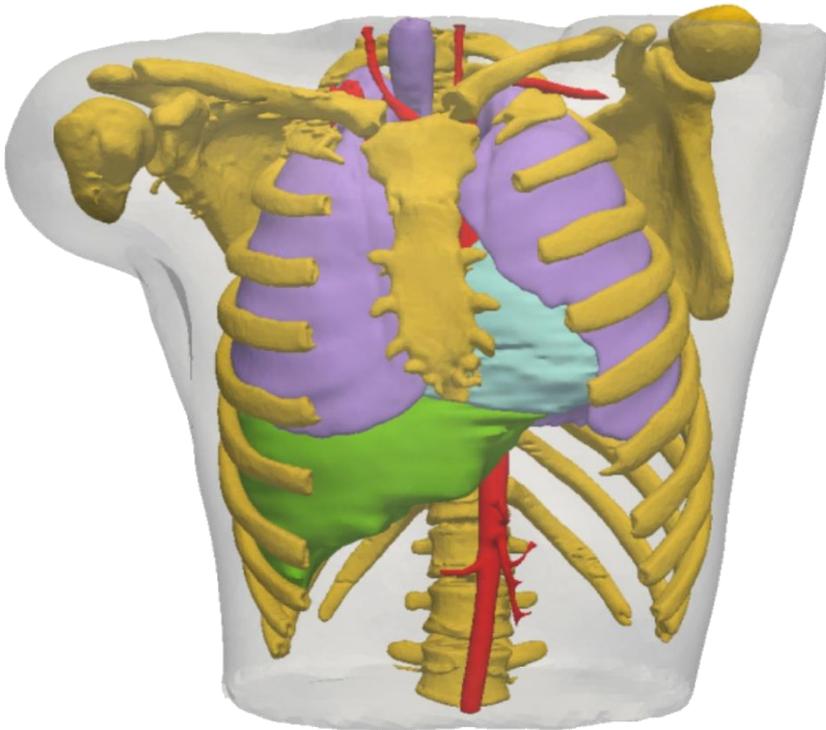
Ecuación del Potencial Extracelular



# El torso es heterogéneo



Tejido	$\sigma_l$ [mS.m <sup>-1</sup> ]	$\sigma_t$ [mS.m <sup>-1</sup> ]
Sangre	625	-
Miocardio	400	180
Músculo esquelético	525	75
Pulmones	50	-
Grasa	40	-
Hueso	6	-



Si el punto  $T$  está sobre la superficie (piel)...

Ecuación del ECG

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

Ecuación del Potencial Extracelular

$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\vec{\sigma}_i \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\vec{\sigma}_m - \vec{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# Tema 8

8.1.- Cálculo de los potenciales en el torso (el "tridominio")

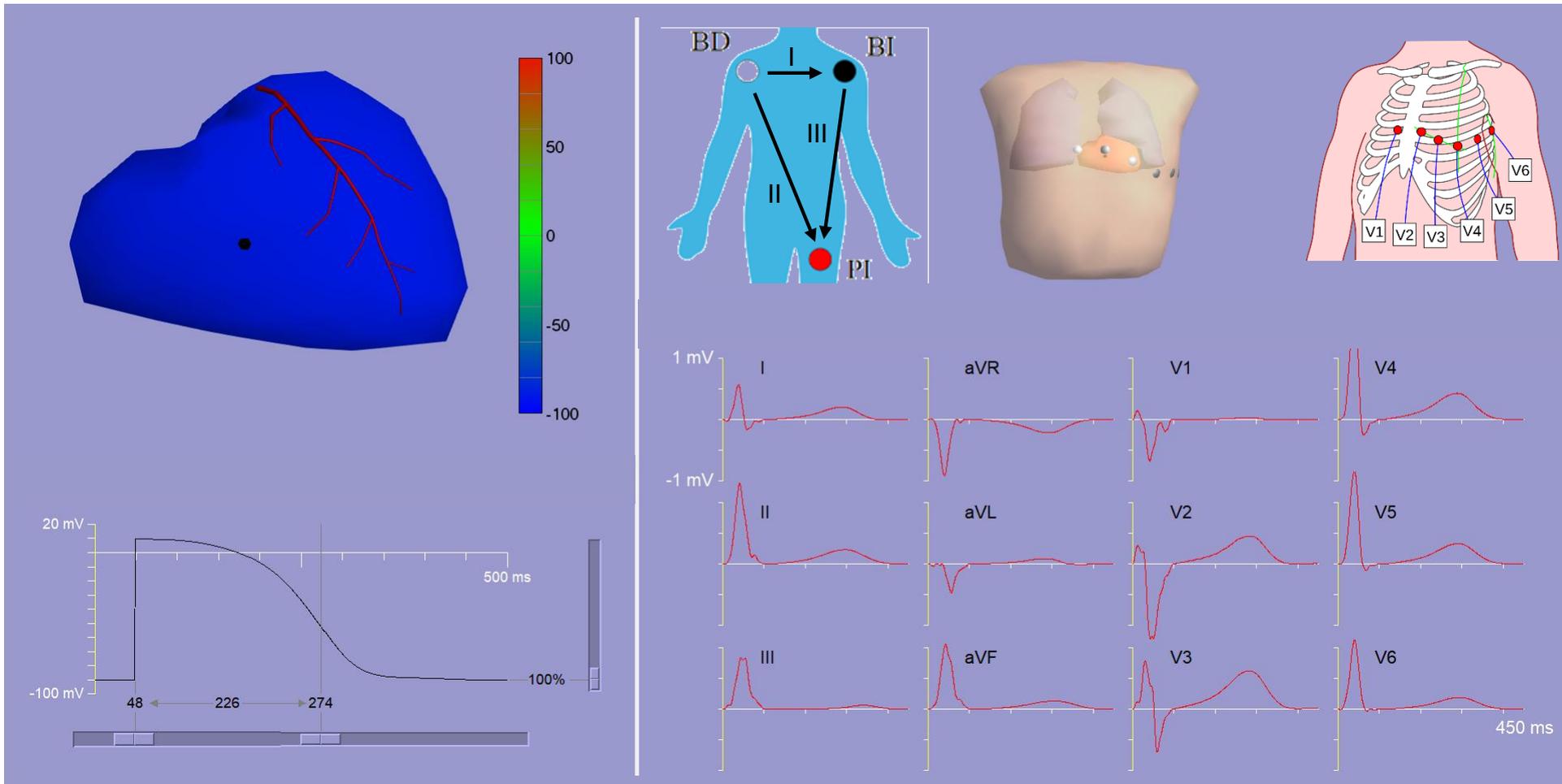
8.2.- Simulación multiescala del ECG

8.3.- Las ondas del ECG

8.4.- Los potenciales de superficie del torso

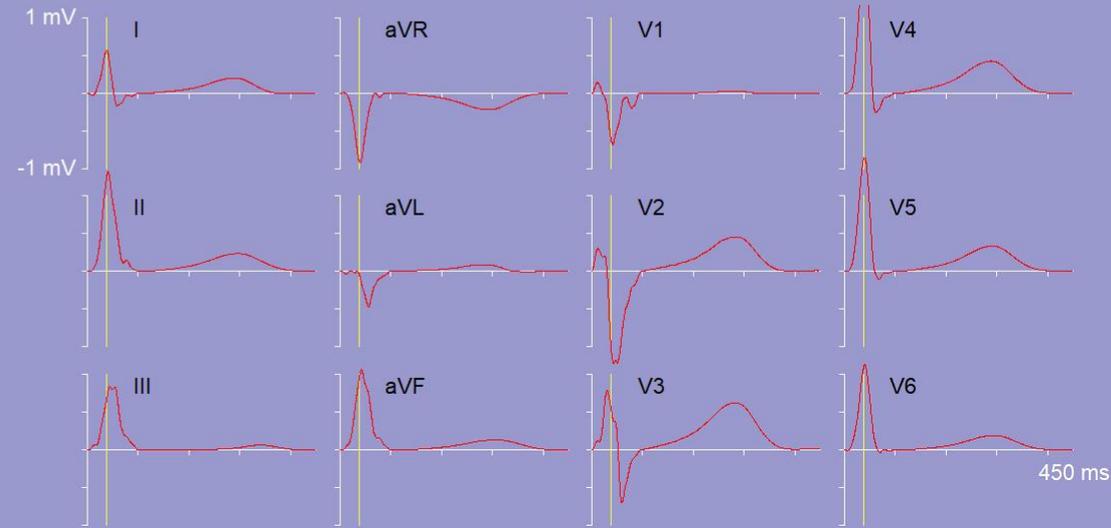
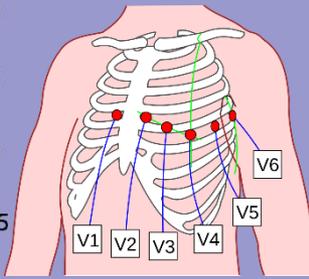
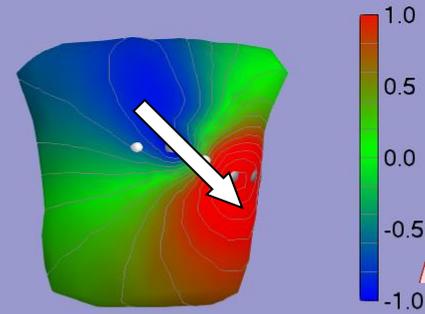
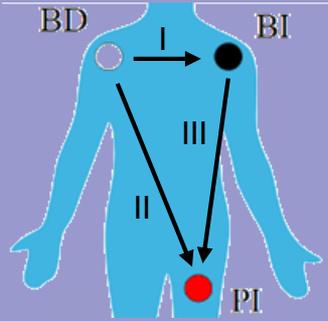
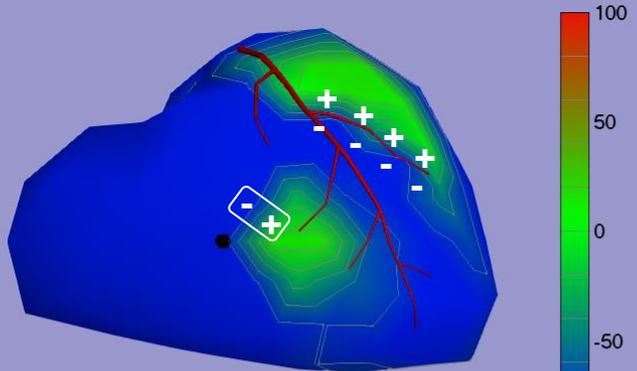
$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\bar{\sigma}}_i \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\bar{\sigma}}_m - \bar{\bar{\sigma}}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# Simulación multiescala del ECG



$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\sigma}_i \bar{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \bar{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \bar{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# El dipolo cardiaco

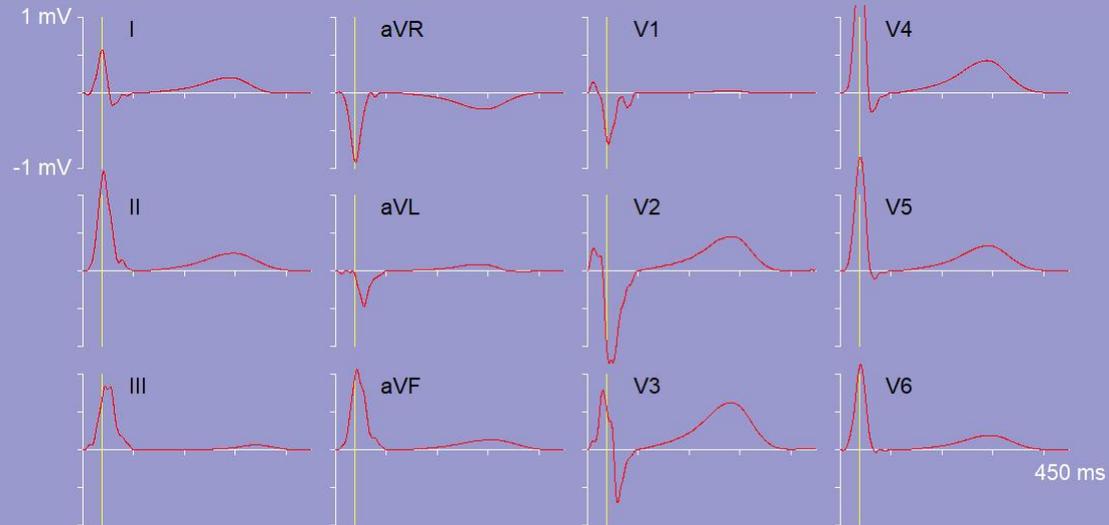
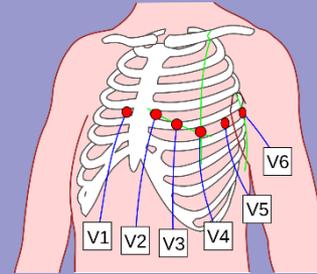
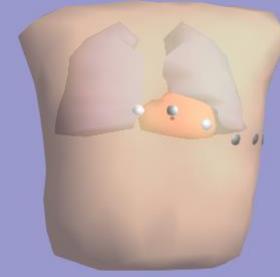
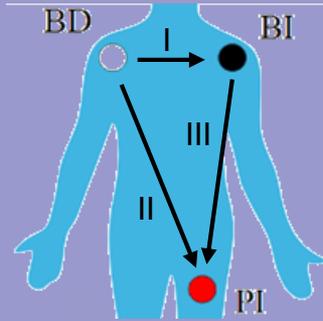
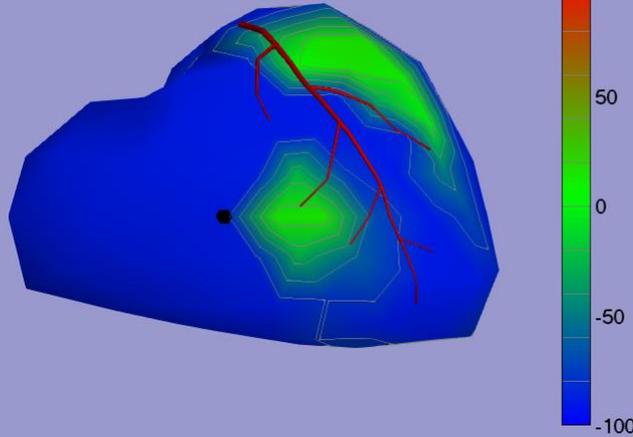


potencial eléctrico que generaría un dipolo situado en el corazón

$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\sigma}_i \bar{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \bar{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \bar{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

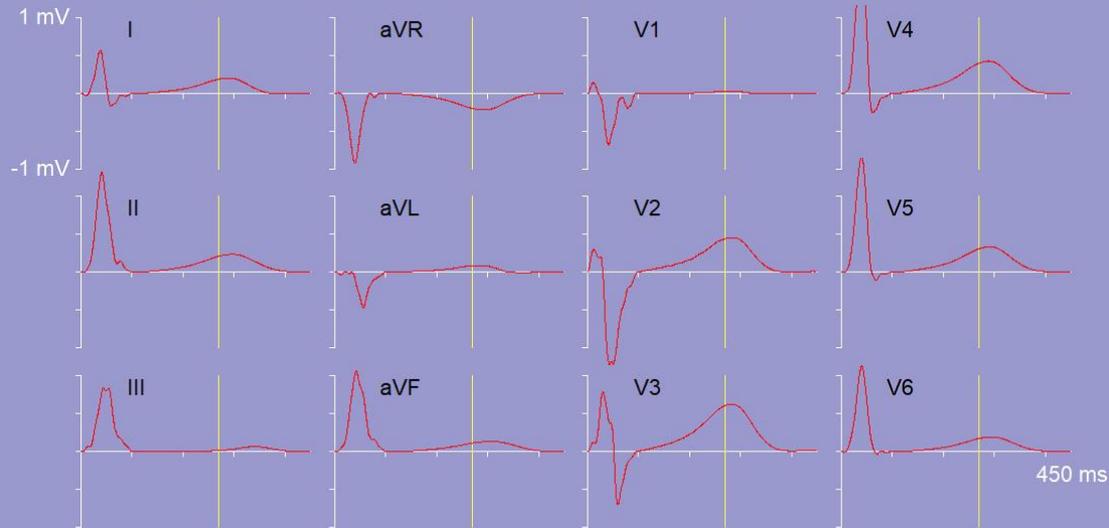
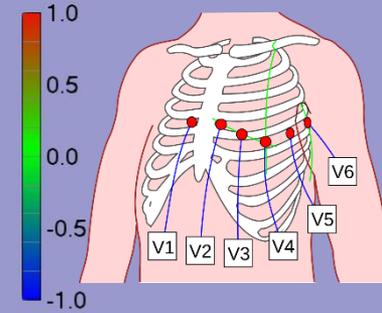
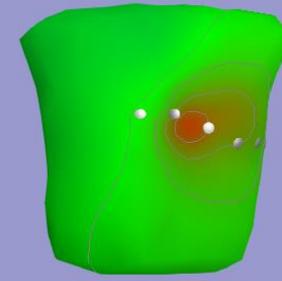
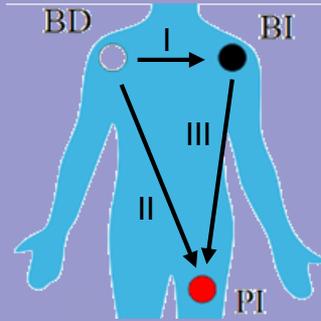
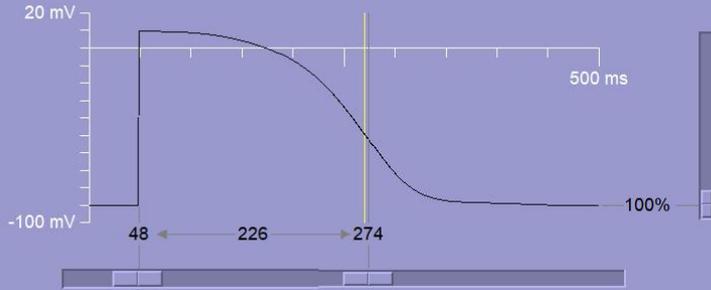
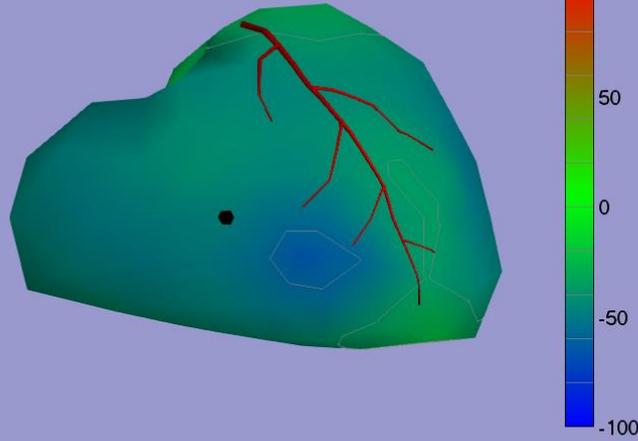


# El complejo QRS



$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\vec{\sigma}_m - \vec{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# La onda T



$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\sigma}_i \nabla V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \nabla \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \nabla \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# Tema 8

8.1.- Cálculo de los potenciales en el torso (el "tridominio")

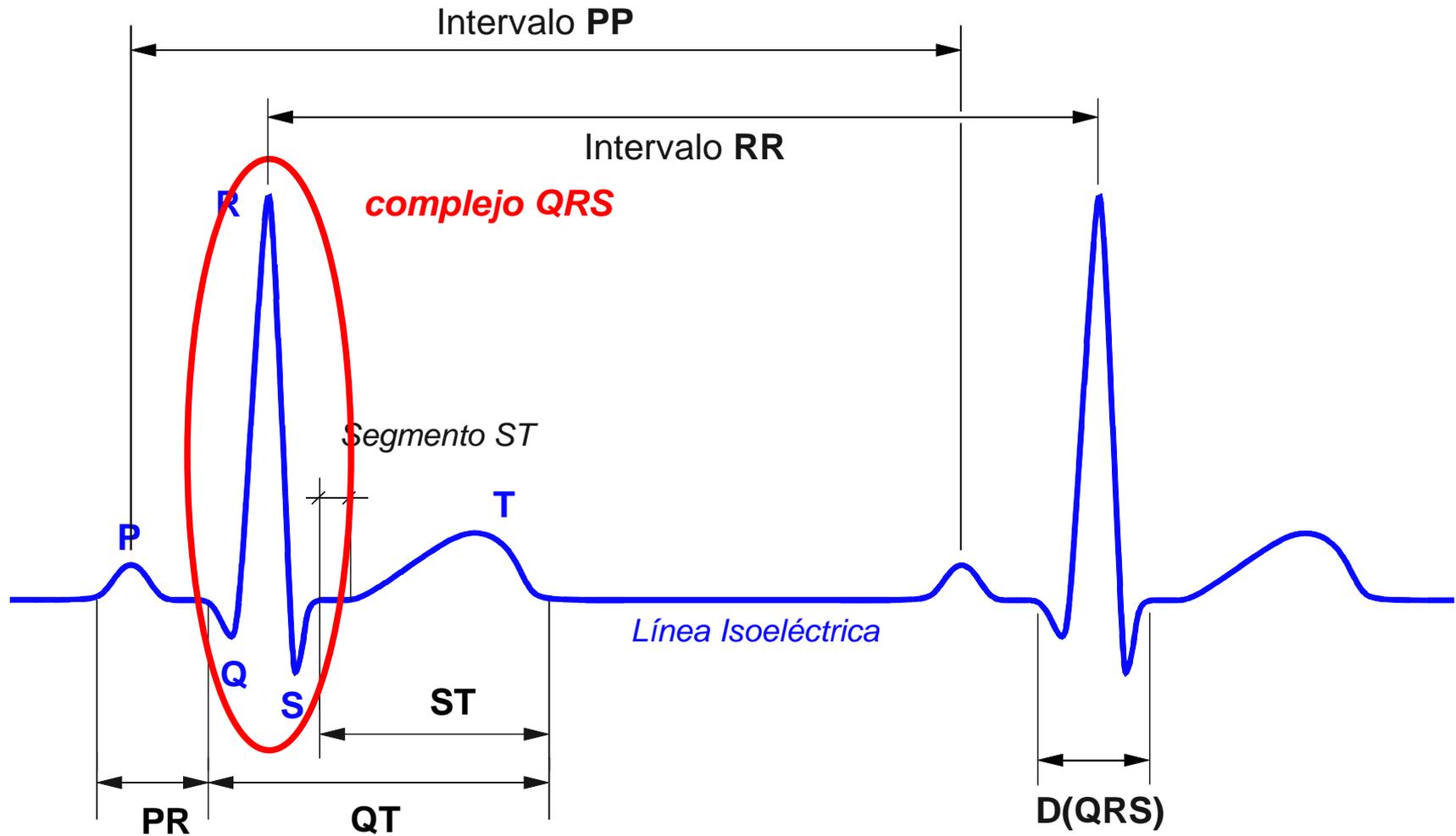
8.2.- Simulación multiescala del ECG

8.3.- Las ondas del ECG

8.4.- Los potenciales de superficie del torso

$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\bar{\sigma}}_i \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\bar{\sigma}}_m - \bar{\bar{\sigma}}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# Las ondas del ECG



$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\sigma}_i \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# Tema 8

8.1.- Cálculo de los potenciales en el torso (el "tridominio")

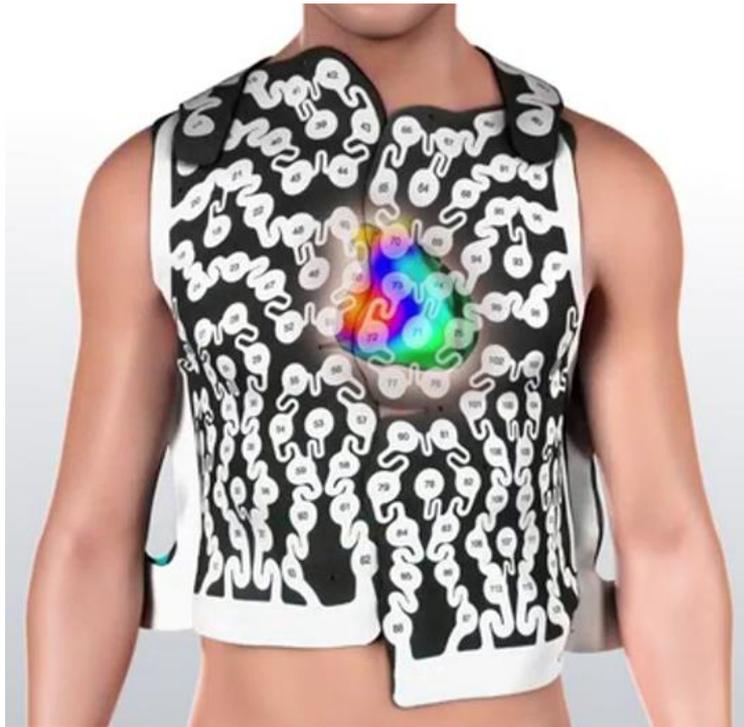
8.2.- Simulación multiescala del ECG

8.3.- Las ondas del ECG

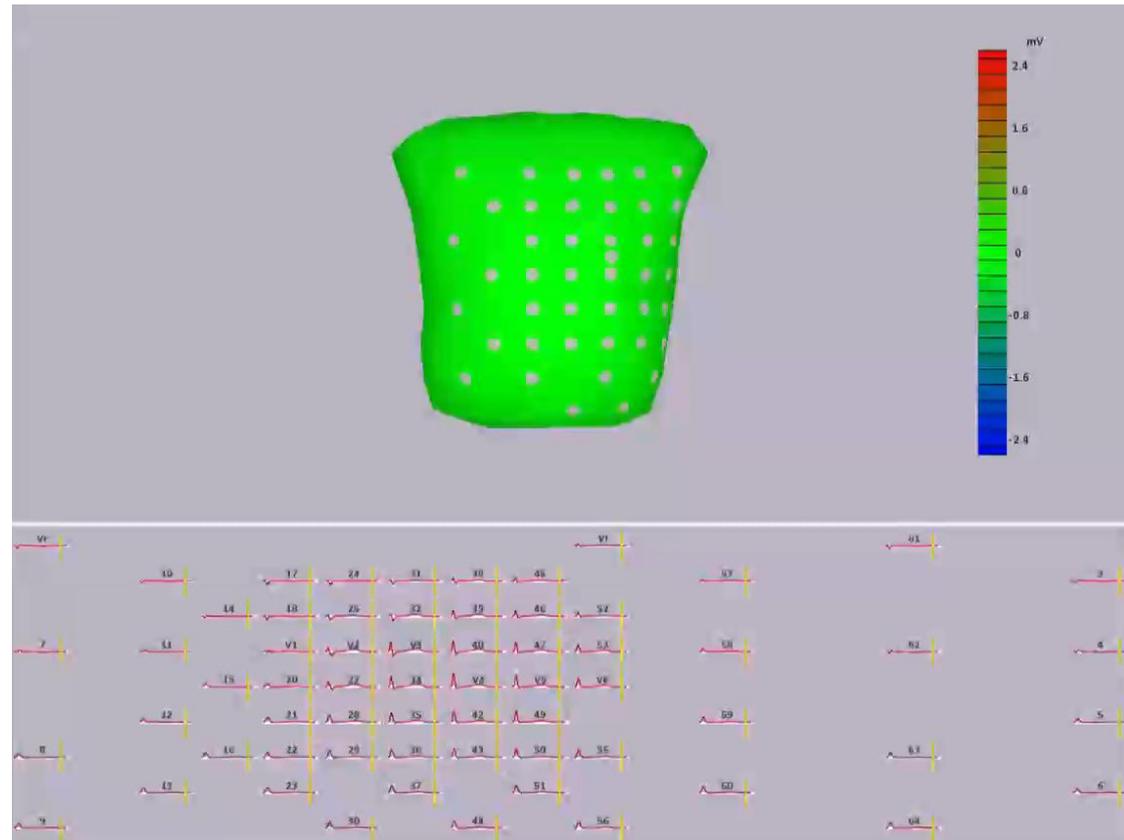
8.4.- Los potenciales de superficie del torso

$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\bar{\bar{\sigma}}_i \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\bar{\bar{\sigma}}_m - \bar{\bar{\sigma}}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

# El BSPM (Body Surface Potential Map)

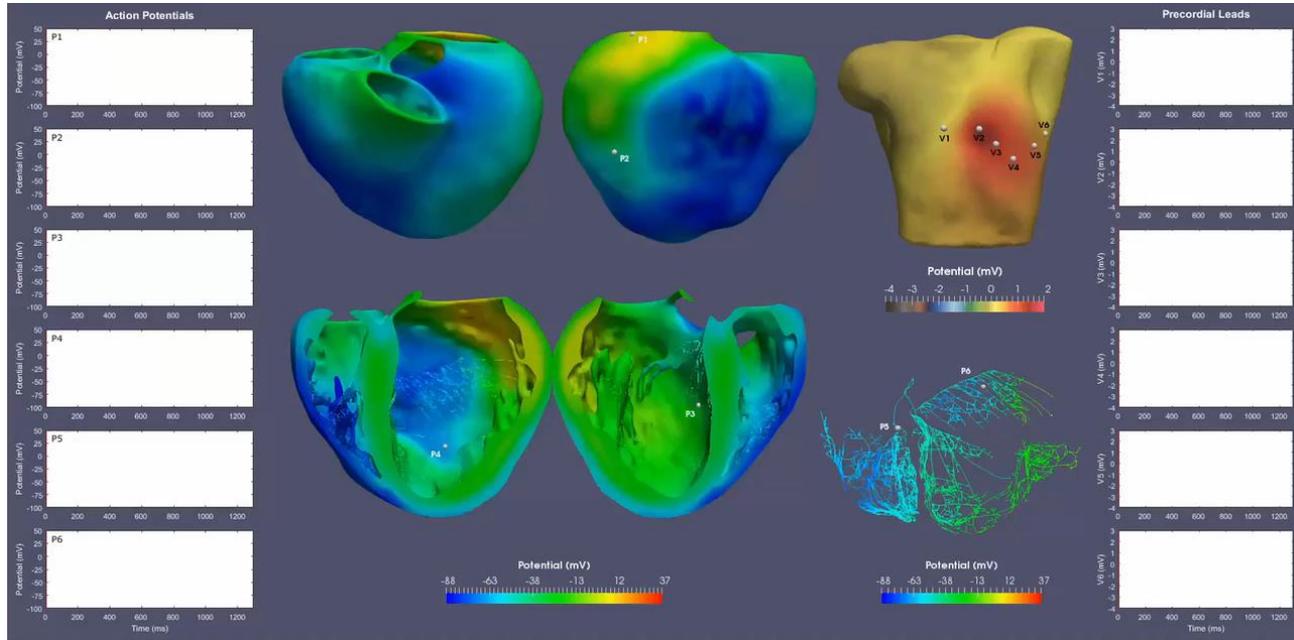
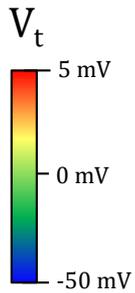


(Medtronic)



$$V_e(\vec{r}_e, t) = -\frac{\gamma}{4\pi\sigma_e} \left[ \iiint_{V_{cor}} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\nabla} V_m \cdot \vec{e}_r}{r_s^2} dV_{cor} + \iint_{S_{piel}} V_e(\vec{r}_{S_{piel}}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{S_{piel}}} \right) \cdot \vec{e}_{n,piel} dS_{piel} + \sum_{m,k} \iint_{S_{mk}} (\vec{\sigma}_m - \vec{\sigma}_k) V_e(\vec{r}_{mk}, t) \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r_{mk}} \right) \cdot \vec{e}_{n,mk} dS_{mk} \right]$$

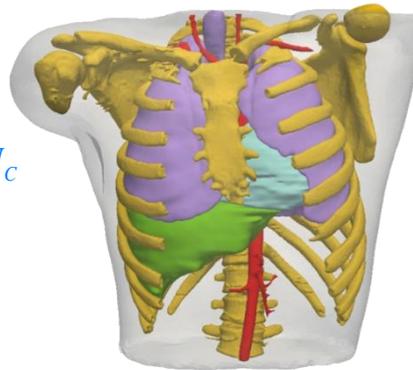
# Simulación multiescala del ECG durante una arritmia ventricular



$$p_{osf} = \prod_i f_{isf}(t, V_m) \quad f = 1 \dots N_f \quad i = 1 \dots N_c$$

$$\frac{df_{isf}}{dt} = \frac{f_{isf,\infty}(V_m) - f_{isf}(t)}{\tau_{isf}(V_m)} \quad i = 1 \dots N_c$$

$$E_s = \frac{RT}{z_s F} \ln \frac{[S]_e}{[S]_i} \quad S = Na^+, Ca^{2+}, K^+, Cl^-$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma_t \vec{\nabla} V_t) = 0$$

$$(1 + \lambda) \vec{\nabla} \cdot (\sigma_e \vec{\nabla} V_e) = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m)$$

$$\beta \vec{\nabla} \cdot (\sigma_i \vec{\nabla} V_m) = c_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \sum_f \bar{g}_{sf} p_{osf} (V_m - E_s) + \sum_{b,i} j_{b,i} + j_{est}$$

# Conclusiones

- El ECG es el registro eléctrico obtenido con electrodos cutáneos (situados sobre la piel) que refleja la actividad eléctrica del corazón.
- Durante la despolarización del corazón, el miocardio es “barrido” por un frente de onda de despolarización que sigue un determinado recorrido. Esto ocurre de manera clara durante la activación de las aurículas (frente de onda de despolarización auricular) y la activación de los ventrículos (frente de onda de despolarización ventricular). Durante las respectivas fases de repolarización auricular y ventricular, no existe tal frente de onda porque el fenómeno es más volumétrico, pero aun así se supondrá que, de forma aproximada, las fases de repolarización respectivas pueden asociarse a la propagación de un frente de onda igual que las fases de despolarización.
- La propagación de los frentes de onda mencionados genera un potencial extracelular similar al que generaría un dipolo situado en el corazón
- La onda P del ECG es el reflejo de la despolarización de las aurículas.
- El complejo QRS del ECG es el reflejo de la despolarización de los ventrículos.
- La onda T del ECG es el reflejo de la repolarización de los ventrículos.
- El ECG convencional se mide en 12 “derivaciones” (I, II, III, aVL, aVR, aVF, V1, V2, V3, V4, V5, V6) que corresponden a ciertas posiciones prefijadas de los electrodos cutáneos de medida.

# Bibliografía

- El dipolo cardiaco y el VCG
  - Capítulo 8 de [3] (punto 8.7)
- El ECG como proyección del dipolo cardiaco
  - Capítulo 8 de [3] (punto 8.8)
  - Capítulo 15 de [2] (punto 15.2)
- Derivaciones electrocardiográficas
  - Capítulo 8 de [3] (punto 8.9)
  - Capítulo 9 de [2] (puntos 9.3.1, 9.3.2 y 9.3.3)
  - Capítulo 15 de [2] (puntos 15.1, 15.3, 15.4 y 15.5)

[1] **Bioelectricity. A quantitative approach.** R Plonsey & R Barr. Ed. Springer, 2007

[2] **Bioelectromagnetism.** J Malmivuo & R Plonsey. Ed. Oxford University Press, 1995

[3] **Bioelectrónica. Señales bioeléctricas.** JM Ferrero, JM Ferrero, J Saiz & A Arnau Ed. SP-UPV, 1994

